Tél : (+237) 657 07 98 07
(+ 237) 651 36 96 96
B.P : 749 Yaoundé, Cameroun
Email : info@institutsaintjean.org

INSTITUT SAINT JEAN

CONCOURSD'ADMISSION
SERIE C

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
DUREE : 2 heures

L'épreuve comporte deux exercices et un problème tous obligatoires sur deux pages.

Exercice 1 : 4,00 points

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ chacune l'équation différentielle : $y'' - 2y' + y = 8x + 4$. **1,00pt**
2) Calculer chacune des intégrales suivantes : $\int_0^2 \frac{e^x}{1+e^x}dx$ et $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x}dx$. **2,00pts**
3) On considère un plan affine euclidien orienté P muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'application f du plan dans le plan qui à tout point M(x, y) associe le point M'(x', y') tel que $\begin{cases} x' = x + y + \sqrt{2} \\ y' = -x + y + 1 \end{cases}$. Donner l'écriture complexe de l'application f. **1,00pt**

Exercice 2 : 3,00 points

On dispose de deux urnes et d'un dé cubique truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On désigne par P_k la probabilité d'obtenir, lors d'un lancer, la face numérotée k (k entier tel que $1 \leq k \leq 6$). Le dé est pipé de sorte que $P_1 = 3P_2$, $P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = P_6$. L'urne U_1 contient trois boules noires et une boule rouge. L'urne U_2 contient trois boules rouges et deux boules noires. Toutes ces boules sont indiscernables au toucher. Une partie se déroule de la façon suivante: le joueur lance le dé; si le résultat est 1, alors il tire au hasard une boule dans l'urne U_1, sinon il tire au hasard une boule dans l'urne U_2. On considère les évènements suivants : A :«obtenir 1 en lançant le dé» ; N :«obtenir une boule noire».

1) Calculer P_k pour k entier tel que $1 \leq k \leq 6$. **1,00pt**
2) Construire un arbre de choix traduisant cette expérience aléatoire. **1,00pt**
3) Montrer que la probabilité d'obtenir une boule noire est $\frac{17}{32}$. **1,00pt**

Problème : 13,00 points

Dans toute cette partie, n désigne un nombre entier naturel non nul. On considère les fonctions h, f et $g_n$définies sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \frac{x-\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ et $g_n(x) = \frac{n\ln x+2x-2n}{2}$. On désigne par (C) et (C') les courbes représentatives des fonctions f et h dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique deux centimètres.

1) Étudier les variations de la fonction g_n et dresser son tableau des variations. **2pts**
2) Montrer qu'il existe un unique réel strictement positif α_n tel que $g_n(\alpha_n) = 0$, puis prouver que $1 \leq \alpha_n < e^2$. **1,00pt**

3) Déterminer α_1. **0,50pt**

4) Montrer que $g_{n+1}(\alpha_n) = -\frac{\alpha_n}{n}$ et en déduire que la suite (α_n) est croissante. **1,00pt**

5) En déduire que la suite (α_n) est convergente. **0,5pt**

6) Calculer la limite de la suite $(\ln\alpha_n)$, puis en déduire celle de la suite (α_n). **1,00pt**

7) Calculer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition. **1,00pt**

8) Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ et vérifier que pour tout réel x de $]0;\ +\infty[$, $f'(x) = \frac{g_1(x)}{2x\sqrt{x}}$. **1,50pt**

9) Dresser le tableau des variations de la fonction f. **1,00pt**

10) Montrer que les courbes (C) et (C') sont asymptotes au voisinage de plus l'infini. **1,00pt**

11) Étudier les positions relatives des courbes (C) et (C'). **1,00pt**

12) Construire soigneusement les courbes (C) et (C'). **1,50pt**