INSTITUT SAINT JEAN

Tél : (+237) 657 07 98 07
(+ 237) 651 36 96 96
B.P : 749 Yaoundé, Cameroun
Email : info@institutsaintjean.org

CONCOURSD'ADMISSION
SERIE C

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
DUREE : 2 heures

Exercice 1 : 6 points

1) Calculer chacune des intégrales suivantes : $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+e^x} dx$ et $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x} dx$. **2pts**

2) Calculer la limite suivante $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. **1pt**

3) Donner la notation exponentielle du nombre complexe $z = \frac{1+e^{i\frac{\pi}{4}}}{1-e^{i\frac{\pi}{4}}}$. **1pt**

4) L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne le plan (P): $3x - 2y + z + 4 = 0$ et la droite (Δ) dont un système d'équations cartésiennes est $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$.

   a) Donner l'expression analytique de la réflexion de plan (P). **1pt**
   b) Donner l'expression analytique du demi-tour d'axe (Δ). **1pt**

Exercice 2 : 4 points

Un marchand de parapluies ouvre sa boutique 250 jours par an et sur ces jours d'ouverture, il y a 75 jours de temps pluvieux, 50 jours de temps maussade et 125 jours de beau temps. Une analyse de ses ventes a donné les résultats suivants :

- Par un jour de beau temps, il y a 80 % de chance de ne pas vendre de parapluie et 20% de chance de ventre un seul parapluie.
- Par un jour de temps maussade, il y a 30% de chance de ne pas vendre de parapluie, 50% de chance de vendre un seul parapluie et 20% de chance de vendre exactement deux parapluies.
- Par un jour de pluie, il y a 20% de chance de vendre un seul parapluie, 50% de chance de vendre exactement deux parapluies et 30% de chance de vendre exactement trois parapluies.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de parapluies vendus ce jour-là.

1) Quelle est la probabilité que le temps soit maussade pendant un jour d'ouverture de la boutique ? **0,5pt**
2) Sachant que le temps est maussade, quelle est la probabilité de vendre au moins un parapluie ? **0,5pt**
3) Sachant que le temps est pluvieux, quelle est la probabilité de vendre au plus un parapluie ? **0,5pt**
4) Donner la loi de probabilité de X. **1pt**
5) Calculer l'espérance mathématique de X. **0,5pt**
6) Sachant que le commerçant a vendu un seul parapluie, quelle est la probabilité que ce soit un jour pluvieux ? **0,5pt**

Problème : **10 points**

On considère la fonction f définie sur $]0;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x+1} - \ln(\frac{x+1}{x})$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel non n par $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$.

1) Calculer les limites de la fonction f à droite en zéro et en $+\infty$. **1pt**
2) Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0;\ +\infty[$, déterminer f' et donner le sens de variation de la fonction f. **1pt**
3) Dresser le tableau des variations de la fonction f, puis tracer sa courbe. **1,5pt**
4) En déduire le signe de f sur $]0;\ +\infty[$. **0,5pt**
5) Montrer que la fonction f admet une bijection réciproque f^{-1} définie sur un intervalle que l'on déterminera. Tracer la courbe (C') de f^{-1} dans le même repère que (C). **1pt**
6) Donner en justifiant l'ensemble sur lequel f^{-1} est dérivable. **0,5pt**
7) Soit α un réel strictement plus grand que 1. Exprimer en fonction de α, l'aire en unité d'aire du domaine plan délimité par (C) et les droites d'équations $y = 0, x = 1$ et $x = \alpha$. **1pt**
8) Montrer que pour tout nombre entier naturel non nul n, $U_{n+1} - U_n = f(n+1)$, puis en déduire le sens de variation de la suite (U_n). **1pt**
9) Montrer que pour tout nombre entier naturel non nul k, $\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) dx \geq 0$ et en déduire que $\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k} : (1)$. **0,75pt**
10) En utilisant l'inégalité (1), montrer que $\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$. **0,75pt**
11) En déduire que la suite (U_n) est une suite à termes positifs. **0,5pt**
12) En déduire que la suite (U_n) est convergente. **0,5pt**