



Concours d'entrée en 1er Année l'Institut Saint Jean CYCLE INGENIEUR LOCAL

EPREUVE DE MATHEMATIQUES SERIE C

Durée : 2 heures

Exercice 1: 6 points

Soit u la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $u(x) = x^2 - 2 + \ln x$.

1. a) Étudier les variations de u sur $]0; +\infty[$. (1 point)
1. b) Déterminer la limite de u en 0 et en $+\infty$. (1 point)
2. a) Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]0; +\infty[$. On note α cette solution. (0,75 point)
2. b) Montrer que $1 < \alpha < 2$. (0,75 point)
2. c) Déterminer, avec une calculatrice, un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α . (0,75 point)
3. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x . (0,75 point)
4. Démontrer l'égalité $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$. (1 point)

Exercice 2 : 4 points

Une urne contient sept boules numérotées de 1 à 7. Les boules portant un numéro pair sont de couleur blanche ; les boules portant un numéro impair sont de couleur noire.

1. On suppose que, lorsque l'on tire une boule de l'urne, et si l'on désigne par P_k la probabilité de tirer la boule numérotée k , alors on a : $P_1 = P_3 = P_5 = P_7 = \alpha$ et $P_2 = P_4 = P_6 = 2\alpha$.

On tire une boule de l'urne. Quelle est la probabilité de tirer :

- a) une boule blanche ? (0,75 point)
- b) une boule noire ? (0,75 point)
- c) On tire une boule. On note sa couleur et on la remet dans l'urne, puis on tire une deuxième fois une boule de l'urne. On réalise ainsi deux tirages successifs que l'on suppose indépendants. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de boules blanches sorties au cours des deux tirages.
 - i) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X (0,75 point)
 - ii) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X . (0,75 point)

2. On tire maintenant simultanément deux boules de l'urne. On associe à cette épreuve un univers Ω dont les éventualités sont des paires de deux boules. On suppose que si n est le nombre de boules blanches figurant dans une paire et p la probabilité de l'événement réduit à



cette paire, alors le rapport $\frac{p}{n+1}$ est le même pour toutes les éventualités de Ω .

Calculer la probabilité de l'événement : « tirer deux boules blanches ». **(1 point)**

NB : Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

Problème : 10 points

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormal $(\mathbf{0}, \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par (C_m) la courbe d'équation : $y^2 = mx^2 - (m-1)x - 3(2m+1)$, où m est un paramètre réel.

1. Montrer que quel que soit le réel m , la courbe (C_m) passe par un point fixe A dont on donnera les coordonnées. **(1 point)**

2. On suppose que m est non nul.

a) Montrer que (C_m) est une conique à centre dont le centre I_m a pour coordonnées **(0,75 point)**

b) Préciser suivant les valeurs de m , si (C_m) est une ellipse ou une hyperbole. **(0,75 point)**

c) Construire (C_1) et (C_{-1}) dans le même repère. **(0,75 point)**

3. Soit (α, β) un couple de nombres complexes et f la transformation du plan (P), qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \alpha z + \beta$.

a) Déterminer α et β sachant que les points A(3 ; 0) et B(-3 ; 0) ont pour images respectives les points A'(3 ; -3) et B'(-3 ; 3). **(0,75 point)**

b) Donner la nature de f , puis déterminer ses éléments caractéristiques. **(0,75 point)**

Dans la suite du problème, f est la transformation ainsi déterminée.

4. Justifier que l'ensemble (C'_{-1}) , image de (C_{-1}) par f est un cercle dont on précisera le centre et le rayon. **(1 point)**

5. Soit M le point de coordonnées (x, y) et M' le point de coordonnées (x', y') , image de M par f .

a) Exprimer x' et y' en fonction de x et y , puis x et y en fonction de x' et y' . **(1,5 points)**

b) En déduire une équation cartésienne de (C'_{-1}) image de (C_{-1}) par f . **(0,75 point)**

c) Construire (C'_{-1}) dans le repère précédent. **(1 point)**

Soit (D) la droite d'équation : $5x - y - 21 = 0$.

6. Déterminer une équation de (D') , image de (D) par f . **(1 point)**