INSTITUT SAINT JEAN

Tél : (+237) 657 07 98 07
(+ 237) 651 36 96 96
B.P : 749 Yaoundé, Cameroun
Email : info@institutsaintjean.org
www.institutsaintjean.org

CONCOURSD'ADMISSION
SERIE C

EPREUVE DE Mathématiques
Durée : 2 Heures

L'épreuve comporte deux exercices et un problème. Les pages sont numérotées de 1 à 2

Exercice 1 : 4 points

On dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On désigne par P_k la probabilité d'obtenir, lors d'un lancer, la face numérotée k (k entier tel que $1 \leq k \leq 6$). Le dé est pipé de sorte que la suite $(P_k)_{1 \leq k \leq 6}$ est une suite arithmétique et P_1, P_2 et P_4 sont en progression géométrique. On admet que $P_k = \frac{k}{21}$ pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq 6$.

1) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants : A : « obtenir un numéro pair », B : « obtenir un numéro supérieur ou égal à 3 ». **2pts**

2) Les évènements A et B sont-ils indépendants ? **0,5pt**

3) On utilise ce dé pour un jeu. On dispose d'une urne U_1 contenant deux boules noires et trois boules blanches toutes indiscernables au toucher et d'une urne U_2 contenant deux boules noires et une boule blanche toutes indiscernables au toucher. Le joueur lance le dé : s'il obtient un nombre pair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_1 ; s'il obtient un nombre impair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_2. Le joueur est déclaré gagnant lorsqu'il tire une boule blanche, on note G cet évènement.

a) Déterminer la probabilité de chacun des évènements $A \cap G$ et $\overline{A} \cap G$. **1pt**

b) En déduire la probabilité de G. **0,5pt**

Problème 1 : 9 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(3; 2; 1), B(3; 1; 0), C(1; 2; 0)$ et $D(0; 0; d)$, d étant un réel strictement positif.

1) Montrer que les points A, B et C définissent un plan (*P*) et donner les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ normal à (*P*). **1pt**

2) Montrer qu'une équation cartésienne de (*P*) est $x + 2y - 2z - 5 = 0$. **0,5pt**

3) Déterminer l'expression analytique de la réflexion de plan (*P*). **1pt**

4) Déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonal de D sur le plan (*P*). **0,5pt**

5) Montrer que ABCD est un tétraèdre, puis donner son volume. **1pt**

6) Déterminer d pour que la droite (CD) et le plan (*P*) soient orthogonaux ? **0,5pt**

7) Dans l'ensemble W des vecteurs de l'espace, on définit l'endomorphisme φ par $\varphi(\vec{\imath}) = \varphi(\vec{\jmath}) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\varphi(\vec{k}) = \vec{k}$.

a) Donner la matrice de φ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. **0,5pt**

b) Déterminer une base de Ker φ, le noyau de φ et une base de Im φ, l'image de φ. **1pt**

c) Montrer que $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{k})$ est une base de W avec $\vec{a} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$ et $\vec{b} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$. **1pt**

d) Donner la matrice M de φ dans la base $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{k})$. **1pt**

e) Montrer que pour tout entier naturel n, $M^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **1pt**

<u>Problème 2</u>: 7 points

Pour tout entier naturel non nul n, on note f_n la fonction numérique d'une variable réelle définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f_n(x) = \frac{e^x}{(1+x)^n}$ et (C_n) sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité 2cm).

1) Montrer que la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$ et que pour tout entier non nul n, $f_n' = f_n - nf_{n+1}$. **1pt**
2) Étudier les variations de f_2 et dresser son tableau des variations. **1pt**
3) Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par un même point A dont on donnera les coordonnées. **1pt**
4) Calculer $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$ et donner une interprétation graphique du résultat. **1pt**
5) Montrer que la restriction de f_2 sur $]-\infty; -1[$ est une bijection de $]-\infty; -1[$ vers un intervalle à déterminer. **1pt**
6) Pour tout entier naturel non nul n, on pose $I_n = \int_0^1 f_n(t)dt$.

a) Montrer que la suite (I_n) est une suite décroissante et convergente. **1pt**

b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $\frac{1}{n-1}(1 - \frac{1}{2^{n-1}}) \leq I_n \leq \frac{e}{n-1}(1 - \frac{1}{2^{n-1}})$, puis en déduire la limite de la suite (I_n). **1pt**